

T. Moudiki, X. Milhaud - M2R SAF

---

Projet de modélisation en présence de risque de défaut :  
**Article sur la valorisation des CDS**  
**- Dominik O’Kane Stuart Turnbull -**

Sous la direction de M. Tchapda

---

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction et principe des CDS</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>La valorisation d'un CDS</b>	<b>2</b>
2.1	La MTM Value . . . . .	2
2.2	La reduced form approach . . . . .	2
2.3	Valorisation de la <i>premium leg</i> . . . . .	2
2.4	Valorisation de la <i>protection leg</i> . . . . .	3
2.5	La calibration des taux de recouvrement espérés . . . . .	3
2.6	Le calcul du <i>Breakeven default swap spread</i> . . . . .	3
2.7	La construction d'une structure du taux de hasard $\lambda$ . . . . .	3
2.8	Evaluation de la MTM Value . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Résultats</b>	<b>3</b>
3.1	Résultats d'origine obtenus avec la courbe des spreads de l'article . . . . .	3
3.2	Question 1 : parallel up, hausse de 10 bps de la courbe des spreads . . . . .	3
3.3	Question 2 : parallel down, baisse de 10 bps de la courbe des spreads . . . . .	4
3.4	Question 3 : pentification, hausse de 3*maturité - 15 bps de la courbe des spreads . . . . .	4
3.5	Question 4 : aplatissement, baisse de 3*maturité - 15 bps de la courbe des spreads . . . . .	4
3.6	Question 5 : parallel up et pentification, hausse du spread 10-5 . . . . .	4
3.7	Question 6 : parallel down et pentification . . . . .	4
3.8	Question 7 : parallel up et aplatissement . . . . .	4
3.9	Question 8 : parallel down et aplatissement . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Interprétation des résultats</b>	<b>5</b>
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>5</b>

# 1 Introduction et principe des CDS

Les Crédits Default Swap (CDS) sont aujourd'hui des produits financiers courant très utilisés dans le domaine de la gestion de risque. Le principe d'un CDS est de transférer du risque de crédit d'une partie vers une autre. Pour cela, une des deux parties achète de la protection à l'autre en vue de couvrir la perte éventuelle de la valeur faciale d'une action. Ceci se produit en cas "d'événement de crédit" : faillite, défaut de paiement ou restructuration.

Un CDS est également caractérisé par une maturité. Pour payer cette protection, l'acheteur verse des paiements réguliers au vendeur de protection, appelé *premium leg*. Le paiement de ces primes se fait jusqu'à un évènement de crédit ou bien la maturité s'il n'y en a pas. en contrepartie, le vendeur de protection s'engage à verser une somme égale à (100 - Recovery Price of Cheapest To Deliver Asset), appelée *protection leg*. Ainsi chaque partie y trouve son intérêt et l'issue du contrat dépend de la probabilité d'occurrence de l'évènement de défaut.

Plusieurs modèles ont été étudiés pour modéliser cet évènement, nous en présentons un brièvement dans la suite de ce rapport ; à savoir les résultats importants et nécessaires pour la valorisation de CDS. Nous noterons par la suite MTM Value la *Mark To Market Value*.

## 2 La valorisation d'un CDS

### 2.1 La MTM Value

Elle s'exprime très simplement de la manière suivante :

$$MTM(t_v, t_N) = [S(t_v, t_N) - S(t_0, t_N)] \times RPV01(t_v, t_N)$$

avec un signe positif ou négatif, où RPV01 est la *Risky Present Value*.

### 2.2 La reduced form approach

Cette approche modélise l'évènement de défaut lui-même. Les probabilités de défaut sont extraites des prix du marché.

L'évènement de crédit est vu comme le premier évènement d'un processus de comptage de Poisson à un instant  $t = \tau$ . La probabilité associée est donc définie par :

$$P[\tau < t + dt | \tau \geq t] = \lambda(t)dt$$

avec  $\lambda$  le taux du hasard, déterministe dans notre cas.

La probabilité de survie de  $t_v$  à T est  $Q(t_v, T) = e^{-\int_{t_v}^T \lambda(s)ds}$

### 2.3 Valorisation de la *premium leg*

La *full value of the premium leg* est exprimée par :

$$\begin{aligned} \text{full value of the premium leg} &= S(t_0, t_N) \times RPV01 \\ &= S(t_0, t_N) \times \sum_{n=1}^N \Delta(t_{n-1}, t_n, B) Z(t_v, t_N) [Q(t_v, t_N) + \frac{1_{PA}}{2} [Q(t_v, t_{n-1}) - Q(t_v, t_n)]] \end{aligned}$$

## 2.4 Valorisation de la *protection leg*

Nous définissons ici l'*Expected Value of the Recovery Payment* comme  $(1 - R) \int_{t_v}^{t_N} Z(t_v, s) Q(t_v, s) \lambda(s) ds$ . Pour la calculer, on utilise l'expression

$$(1 - R) \sum_{m=1}^{Mt_N} Z(t_v, t_m) [Q(t_v, t_{m-1}) - Q(t_v, t_m)] \lambda$$

## 2.5 La calibration des taux de recouvrement espérés

La calibration des taux de recouvrement est généralement une information directement récupérable sur les marchés grâce aux agences de notation.

Celles-ci ont donc la tâche de donner une évaluation de la sécurité en terme de recouvrement d'un CDS.

## 2.6 Le calcul du *Breakeven default swap spread*

Ce calcul est celui que nous utilisons finalement dans notre fichier Excel et plus précisément dans la macro VBA *Egalisation*. En optimisant l'expression suivante pour rendre l'équation égale à la valeur 0, il est possible de déterminer la structure du taux de hasard pour un spread donné.

Ainsi le *Breakeven default swap spread* noté  $S(t_v, t_N)$  est la quantité suivante :

$$S(t_v, t_N) = \frac{(1 - R) \sum_{m=1}^{Mt_N} Z(t_v, t_m) [Q(t_v, t_{m-1}) - Q(t_v, t_m)]}{RPV01}$$

où  $S(t_v, t_N)$  est le spread coté sur le marché en  $t_v$  à maturité  $t_N$ .

## 2.7 La construction d'une structure du taux de hasard $\lambda$

Supposée être une structure constante par morceaux, c'est finalement la sortie de notre programme. Cela nous permet de calculer les probabilités de survie  $Q(t_v, T)$  en fonction de  $\tau$ . C'est le bootstrapping.

## 2.8 Evaluation de la MTM Value

Finalement, nous serons en mesure de calculer la MTM Value par la formule du départ.

# 3 Résultats

## 3.1 Résultats d'origine obtenus avec la courbe des spreads de l'article

Les résultats de cette section sont contenus dans le tableau suivant :

maturité	6M	1Y	2Y	3Y	5Y	7Y
taux du hasard $\lambda$	6,59%	1,11%	6,96%	5,16%	8,25%	13,18%

## 3.2 Question 1 : parallel up, hausse de 10 bps de la courbe des spreads

Les résultats de cette section sont contenus dans le tableau suivant :

maturité	6M	1Y	2Y	3Y	5Y	7Y
taux du hasard $\lambda$	7,25%	1,11%	7,60%	5,16%	8,90%	13,89%

### 3.3 Question 2 : parallel down, baisse de 10 bps de la courbe des spreads

Les résultats de cette section sont contenus dans le tableau suivant :

maturité	6M	1Y	2Y	3Y	5Y	7Y
taux du hasard $\lambda$	5,94%	1,11%	6,32%	5,16%	7,61%	12,47%

### 3.4 Question 3 : pentification, hausse de 3\*maturité - 15 bps de la courbe des spreads

Les résultats de cette section sont contenus dans le tableau suivant :

maturité	6M	1Y	2Y	3Y	5Y	7Y
taux du hasard $\lambda$	5,94%	0,60%	4,96%	-33,26%	12,96%	31,24%

### 3.5 Question 4 : aplatissement, baisse de 3\*maturité - 15 bps de la courbe des spreads

Les résultats de cette section sont contenus dans le tableau suivant :

maturité	6M	1Y	2Y	3Y	5Y	7Y
taux du hasard $\lambda$	0,00%	?	7,49%	-74,04%	18,51%	55,17%

### 3.6 Question 5 : parallel up et pentification, hausse du spread 10-5

Les résultats de cette section sont contenus dans le tableau suivant :

maturité	6M	1Y	2Y	3Y	5Y	7Y
taux du hasard $\lambda$						

Je ne sais pas pourquoi mais il y a une erreur de débogage dans ce cas que je ne comprends pas et je n'ai donc pas de valeurs. Il se peut que je n'ai pas compris ce qu'est la question et que mes entres de programme soient mauvaises voire impossibles.

### 3.7 Question 6 : parallel down et pentification

Les résultats de cette section sont contenus dans le tableau suivant :

maturité	6M	1Y	2Y	3Y	5Y	7Y
taux du hasard $\lambda$	4,74%	16,67%	7,49%	-74,04%	18,51%	55,17%

### 3.8 Question 7 : parallel up et aplatissement

Les résultats de cette section sont contenus dans le tableau suivant :

maturité	6M	1Y	2Y	3Y	5Y	7Y
taux du hasard $\lambda$						

Je ne sais pas pourquoi mais il y a une erreur de débogage dans ce cas que je ne comprends pas et je n'ai donc pas de valeurs. Il se peut que je n'ai pas compris ce qu'est la question et que mes entres de programme soient mauvaises voire impossibles.

### 3.9 Question 8 : parallel down et aplatissement

Les résultats de cette section sont contenus dans le tableau suivant :

maturité	6M	1Y	2Y	3Y	5Y	7Y
taux du hasard $\lambda$						

Je ne sais pas pourquoi mais il y a une erreur de débogage dans ce cas que je ne comprends pas et je n'ai donc pas de valeurs. Il se peut que je n'ai pas compris ce qu'est la question et que mes entres de programme soient mauvaises voire impossibles.

## 4 Interprétation des résultats

Plusieurs résultats intéressants peuvent être tirés de ces simulations :

- le taux de hasard est le taux en situation d'absence d'opportunité d'arbitrage, ce qui signifie que les deux parties sont en situation équitable au moment où se négocie le contrat. En conséquence, un taux de hasard négatif apparaissant dans nos résultats signifie qu'il y a une opportunité d'arbitrage pour ce contrat, les probabilités ne pouvant bien sûr pas être négatives.
- un parallel up a tendance à déplacer la courbe du taux de hasard vers le haut, ce qui paraît logique vu l'expression de la probabilité de survie. En effet, si le spread augmente,  $\lambda$  aussi et la probabilité de défaut baisse.
- un parallel down a l'effet inverse.
- une pentification avec une hausse de courbe des spreads et de la maturité a pour conséquence de réduire le taux de hasard pour de petites maturités et inversement pour les grandes maturités.
- un aplatissement provoque une hausse assez nette du taux de hasard. Cependant, nos résultats semblent suspects.
- le parallel down et pentification, donc baisse de la courbe des spreads et augmentation de la maturité, provoque une baisse de taux de hasard à la première maturité mais une augmentation par la suite.

Ces résultats semblent assez clairs car l'acheteur est prêt à payer plus cher sa protection si elle risque moins de lui faire défaut !

## 5 Conclusion

Ce projet a été l'occasion de se familiariser avec des produits financiers très importants car très utilisés et nous a permis de toucher à une première approche de valorisation de ces CDS.

Le sujet était intéressant et la réalisation en VBA est également un point positif en termes de programmation ; nous avons pu ainsi nous y perfectionner, sachant que ce langage est couramment utilisé dans le monde professionnel bien qu'il présente certains inconvénients, notamment un manque de rigueur au niveau de la programmation.