MILHAUD Xavier
VOISIN Basile

TP 4 : Interpolation linéaire par morceaux

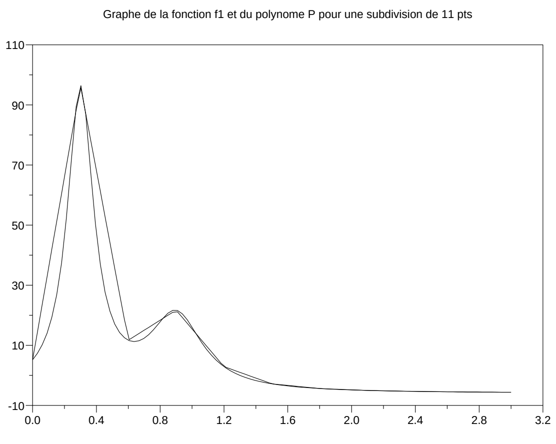
Question 1 .
Fonction permettant le calcul des coefficients des P_i :

function [a,b] = pwl(x,y)
n = length(x) ;
a = y(1 :n-1) ; b = (y(2 :n)-y(1 :n-1))./(x(2 :n)-x(1 :n-1)) ;

Question 2 .
Cette fonction procède en deux temps : d'abord elle cherche l'intervalle contenant x, et ensuite, elle évalue $P(t)$ en utilisant la bonne expression de P_i.

function p = pwleval(a,b,x,t)
n = length(x) ; i = 1 ;
while (t > x(i)) , i = i+1 ; end
if (i > 1) then, i = i-1 ; end
p = b(i)(t-x(i))+a(i)*

Question 3 .
Après avoir généralisé la fonction pwleval à un vecteur, nous avons tracé le graphe de la fonction $f_1(x) = \frac{1}{(x-0{,}3)^2+0{,}01} + \frac{1}{(x-0{,}9)^2+0{,}04} - 6$ et du polynôme P correspondant sur l'intervalle $[0, 3]$:



Question 4 .

Le but est donc de calculer la borne n_1 pour la fonction f_1 sur $[0,3]$ telle que l'erreur d'interpolation soit inférieure à δ=0,1.

Pour cela, on prend n tel que $n \geq 1 + (\beta - \alpha) * sqrt(M/(8*\delta))$.

Notre pas h est égal à $(\beta - \alpha)/(n-1)$ puisque nous sommes dans le cas d'une subdivision uniforme. Nous allons donc calculer le max de la dérivée seconde afin d'obtenir la valeur de M. Seul un ordre de grandeur nous interesse pour cette valeur.

La dérivée seconde vaut donc : $f_1^{(2)}(x) = \frac{6(x^2-6x+0.866)}{(x^2-6x+0.1)^3} + \frac{6(x^2-1.8x+0.796)}{(x^2-1.8x+0.85)^3}$

On trouve en effectuant le calcul sous scilab : $n_1 = 475$ en ayant pris pour x=linspace(0,3,100000) et ayant obtenu un max de 19965,5.

Question 5 .

Le but dans cette partie est de trouver une subdivision plus efficace, c'est à dire moins de x_i en conservant une erreur d'interpolation similaire, donc notre borne n_1 doit être inchangée.

On nous demande donc d'écrire une fonction pwladapt(α,β, h, δ, f_1) qui nous retourne un vecteur correspondant à la subdivision de l'intervalle pour une bonne interpolation, donc une suite de x_i.

Nous avpns écrit une fonction récursive qui permet de crér un vecteur contenant toutes les bornes superieures des intervalles admissibles (on procède par dichotomie) ; que nous utilisons ensuite dans la fonction pwladapt qui se contente de concaténer la borne inférieure de l'intervalle à subdiviser avec le vecteur précédent.

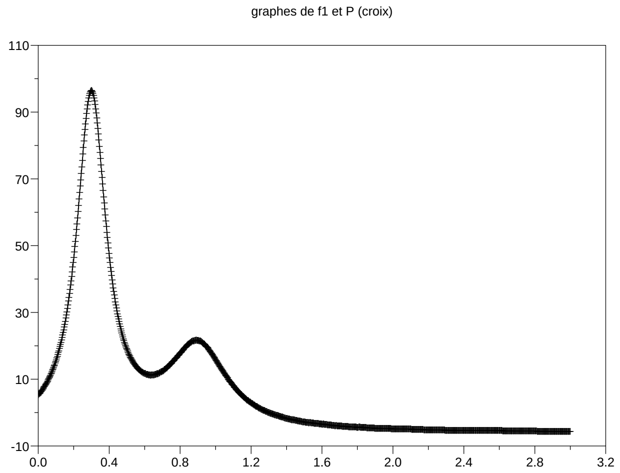
```
function x = rec(u,v,h,d,f)
if ( (abs(f((u+v)/2)-((f(u)+f(v))/2))<=d) | (abs(u-v)<h) ) then , x = [v];
else x = [rec(u,(u+v)/2,h,d,f),rec((u+v)/2,v,h,d,f)]; end
endfunction

function z = pwladapt(a,b,h,d,f)
z = [[a],rec(a,b,h,d,f)];
endfunction
```

Question 6 .

Ici, on teste la fonction pwladapt avec $\alpha = 0$, $\beta = 3$, $h = \frac{3}{n_1-1}$, $\delta = 0,1$ et $f = f_1$.

Pour tracer f_1 et P, on utilise donc une grille régulière de 1000 points entre 0 et 3. La fonction pwladapt nous a permis de calculer la subdivision z de $[a,b]$ comportant 76 points ; la fonction pwl nous a permis de calculer les coefficients de P ; et finalement, la fonction pwlevalgen nous a servi pour tracer le polynôme P.

Nous constatons une superposition excellente des courbes de f_1 et de P :



Ici, le critère dadmissibilité de la subdivision s'est montré valable.

Question 7 .

Ici, on veut trouver une subdivision admissible pour interpoler $\sin(x)$ *sur* $[0, 2\pi]$ *en prenant* $\delta = 0,1$. *Avec ce* δ *on calcule* $n_2 = 9$, *d'où* $h = \frac{2\pi}{n_2 - 1} = 0,785$. *En appliquant pwladapt, on obtient une "subdivision" en un seul intervalle, l'intervalle d'origine* $[0, 2\pi]$, *ce qui est logique car* $\sin(\frac{0+2\pi}{2}) = \sin(0) = \sin(2\pi)$. *On obtient ainsi un polynôme P qui est en fait une droite et qui interpole donc mal la fonction sinus.*

Pour que l'algorithme fonctionne correctement, une condition suffisante serait que, si f est periodique, l'intervalle d'interpolation ne soit pas multiple d'une période. Il y aurait comme une idée de dérivées.